电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

# An Introduction to Game Theory


**Xiaolin Yang**

Data Mining Lab, Big Data Research Center, UESTC
School of Computer Science and Engineering
Email：xiaolinyn@gmail.com

# 提纲



- ✓ 何为博弈论
- ✓ 分类
- ✓ 策略博弈
  1. 定义
  2. 几个典型博弈
  3. 纳什均衡
  4. 纳什定理
- ✓ 展开型博弈
  1. 定义
  2. 均衡
     - 2.1 纳什均衡
     - 2.2 子博弈完美均衡
- ✓ 联盟博弈

# 01 何为博弈论

# 何为博弈论



**博弈**，字典解释为“局戏和围棋”，引申含义为：在一定条件下，遵守一定的规则，一个或几个拥有绝对理性思维的人或团队，从各自允许选择的行为或策略中进行选择并加以实施，并从中各自取得相应结果或收益的过程。

但凡决策者之间的互动会影响到其最终收益的场景，都可以用**博弈论(*Game Theory*)**这一工具进行研究。

## 博弈论历史简介

博弈论的思想可以追溯到18世纪，但主要理论发展开始于20世纪20年代数学家米尔·鲍雷尔[*Emile Borel*]和冯·诺依曼[*von Neumann*]的工作。现代博弈论诞生的标志是1944年冯·诺依曼和奥斯卡·摩根斯坦[*Oskar Morgenstern*]的名著《**博弈论与经济行为**》的出版，此书奠定了该领域的基石。

在20世纪50年代早期，约翰·F.纳什[*John F.Nash*]提出了**纳什均衡(*Nash Equilibrium*)**的概念，并开展了有关讨价还价的博弈论研究。此后，博弈论模型开始应用于经济学与政治学、心理学。

70年代博弈论首次作为工具应用于进化生物学，进化博弈理论的基本均衡概念——**进化稳定策略(*Evolutionarily stable strategy, ESS*)**由约翰·梅纳德·史密斯[*John Maynard Smith*]提出，此概念的提出标志着**进化博弈理论**的诞生。随后，博弈论方法逐渐掌控微观经济学，并运用到经济学许多领域和其他社会行为学的各个领域。

# 02 分类

由于历史原因，博弈通常分为**非合作博弈(*Non-cooperative Games*)**与**合作博弈(*Cooperative Games*)**两类。然而这其实容易让人产生误解，以为前者描述的是**局中人(*Players*)**从不合作，只有勾心斗角的案例，而后者与此相反。但实际上，在两种博弈中，合作与冲突并存。故而，当前相关学者提倡用**策略博弈(*Strategic Games*)**替代非合作博弈，用**联盟博弈(*Coalitional Games*)**替代合作博弈以避免产生以上误解，虽然现在还有一些文章偶有使用第一套命名方式，但近年来越来越多的论文或文献已经逐渐向第二套命名体系靠拢了。

策略博弈与联盟博弈最为关键的差别是关注焦点的不同，两者的主要构成要素：

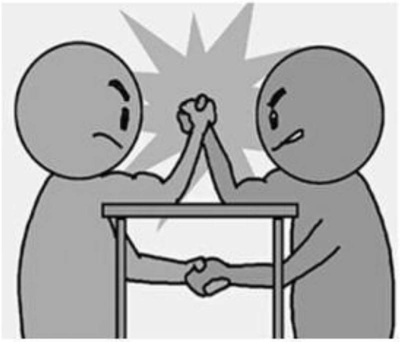
# 分类

**策略博弈(*Strategic Games*)：**

- 局中人集合(*players*)
- 对于每个局中人，有一个行动集合(*actions*)
- 对于每个局中人，有关于行动剖面集合(*action profiles*)的偏好

**联盟博弈(*Coalitional Games*)：**

- 局中人集合
- 对于每个联盟，相应的行动集
- 对于每个局中人，在所有(他作为成员的)联盟的所有行动集上的偏好



# 03 策略博弈

博弈论，主要是对现实世界的不同场景中，人与人之间所存在的可能的冲突与合作关系进行建模与分析，所以某些典型场景，或常见模型，可以说是博弈论这一领域的基石。后面，主要列举几个常见的模型，这些模型往往描述了比其名称更为宽泛的一类博弈场景。

## 几个常见博弈

### 1. 性别之战(*Battle of the Sexes* / *Bach or Stravinsky* 巴赫还是斯特拉文斯基，*BoS*)

| | *Bach* | *Stravinsky* |
|---|---|---|
| *Bach* | 2, 1 | 0, 0 |
| *Stravinsky* | 0, 0 | 1, 2 |

两人希望一起外出，有两场音乐会可供选择：巴赫与斯特拉文斯基。其中一个人更喜欢巴赫，另一个人更喜欢斯特拉文斯基。如果他们各自欣赏不同的音乐会，那么每个人表现出同等程度的不乐意。也就是说，他们都更倾向于一起去听音乐会，只是对具体哪一个偏好有异而已。

*BoS*描述的是此类博弈：局中人同意合作好于不合作，但他们对最后的结局存在分歧。

## 2. 匹配硬币(*Matching Pennies*)

| | *Head* | *Tail* |
|---|---|---|
| *Head* | 1, −1 | −1, 1 |
| *Tail* | −1, 1 | 1, −1 |

两人同时选择出示硬币的正面或反面，如果他俩出示同一面，那么局中人2向局中人1支付1元人民币，否则，则后者向前者支付1元人民币。

*Matching Pennies*是所谓零和博弈的一个特例，所谓零和博弈，就是在同一个行动剖面中，局中人收益之和为0，亦即，“我之得即你之失”。零和博弈纯粹是冲突性的。

## 3. 社会困境(*Social Dilemmas*)

| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $C$ | $R, R$ | $S, T$ |
| $D$ | $T, S$ | $P, P$ |

$C$：*cooperate*合作

$D$：*defect*背叛/不合作

*Social Dilemmas*描述的是个体利益与群体利益相悖的一类博弈。

通常满足以下条件：

$$R > P\ ,\ R > S\ ,\ R > \frac{1}{2}(T + S)$$

**3.1 懦夫博弈(*Chicken Game*，常被误称为“斗鸡博弈”，但*Chicken*在美国口语中是“懦夫”之意)，也叫雪堆博弈(*Snowdrift Game*)，鹰鸽博弈(*Hawk-dove Game*)**

| | 等待 | 开过去 |
|---|---|---|
| 等待 | 2, 2 | 0, 3 |
| 开过去 | 3, 0 | -1, -1 |

$$T > R > S > P$$

| | C | D |
|---|---|---|
| C | R, R | S, T |
| D | T, S | P, P |

有两人开车相遇，都要经过一次只能容许一辆车经过的桥。现在，每人有两个行动可供选择：一是退下来等待对方开过来，一是直接开过去。如果一方退下来，而对方没有退下来，则对方获利颇丰，而退下来等待的人就显得很懦弱；如果对方也退下来，双方则打个平手；如果自己没退下来，而对方退下来，则算作自己胜利；如果两人都前进，那么则两败俱伤，也许车毁人亡。

## 3.2 猎鹿问题(*the Stag Hunt*)

| | 鹿 | 兔 |
|---|---|---|
| 鹿 | 3, 3 | 0, 2 |
| 兔 | 2, 0 | 1, 1 |

$$R > T > P > S$$

| | C | D |
|---|---|---|
| C | R, R | S, T |
| D | T, S | P, P |

两个猎人一起捕猎牡鹿，如果大家齐心协力，都保持聚精会神的状态，那么他们将获得成功，但每个人又容易受到一旁兔子的诱惑而擅离岗位去捕捉兔子，这时，牡鹿就会逃跑，而兔子则只属于那个开小差的人。

虽然此类博弈与其他社会困境相比稍显另类，亦即这里$R$(合作的收获) > $T$(背叛的诱惑)，但是现实生活中，确实存在此类博弈。比如国与国之间的军备竞赛，纵使两国都知道相互合作控制军备无论从经济还是军事角度都最好。但是，或者出于怀疑，或是基于经验，或者因为诱惑，它们还是具有发展军备的倾向。

## 3.3 囚徒困境(*Prisoner's Dilemma*)

| | 沉默 | 告密 |
|---|---|---|
| 沉默 | -1, -1 | -4, 0 |
| 告密 | 0, -4 | -3, -3 |

$$T > R > P > S$$

| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $C$ | $R, R$ | $S, T$ |
| $D$ | $T, S$ | $P, P$ |

## 3.3 囚徒困境(*Prisoner's Dilemma*)

| | 沉默 | 告密 |
|---|---|---|
| 沉默 | *-1, -1* | *-4, 0* |
| 告密 | *0, -4* | *-3, -3* |

这个笑话通常作为介绍囚徒困境的开场白，而囚徒困境是社会困境中最为知名的一个。现在假设有两名嫌犯，不管他是不是柴可夫斯基。若他俩都选择沉默，那么两人都因轻度罪而被判刑1年，如果他们中间有一人告密，则告密者被无罪释放，而另一个“老实人”则被判重刑4年。倘若两者都告密，则均被判3年(收益如上，其中被判刑年数取反作为盈利)。

## 3.3 囚徒困境(*Prisoner's Dilemma*)

| | 沉默 | 告密 |
|---|---|---|
| 沉默 | -1, -1 | -4, 0 |
| 告密 | 0, -4 | -3, -3 |

在囚徒困境中，“困境”这一性质尤其明显。先介绍一个概念：

严优：令第$i$个局中人的收益为$u_i$，他所采取的行动为$a_i$，其他人的行动为$a_{-i}$，则称局中人$i$的行动$a_i$严优于他的行动$a_i'$，如果有：

$u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i})$ 对其他局中人的每一系列行动$a_{-i}$都成立

囚徒困境里，对于每一个局中人来讲，告密(背叛/不合作)都严优于沉默(合作)。

## 3.3 囚徒困境(*Prisoner's Dilemma*)

| | 沉默 | 告密 |
|---|---|---|
| 沉默 | -1, -1 | -4, 0 |
| 告密 | 0, -4 | -3, -3 |

$$T > R > P > S$$

现在，换你，与一个陌生人，在囚徒困境中进行博弈，你会怎样抉择？

博弈论专家做过许多囚徒困境的实验。总体而言，在不允许相互沟通的情形下(正如博弈所一般假设的那样)，那么**一次博弈中，多数人都选择了告密**(一开始也存在少数很诚实的合作者)；那么，允许相互沟通是否会促成更多的合作呢？答案是肯定的，但提升的并不多，许多人事先承诺要合作但事实上还是选择了背叛，以致**被背叛者发誓以后决不合作了**！

## 纳什均衡(*Nash Equilibrium*)：

纳什均衡是具有如下性质的策略剖面$a^*$，假定其他每一个局中人都**坚持采取**行动$a_j^*$，那么局中人$i$不能选择一个与$a_i^*$不同的行动而使自己获得**更好**的结果。

通常有一个简述：纳什均衡是每个局中人不能**单方面**改变自己的策略/行动而使自己获得**更高**收益的博弈均衡状态(表现为策略剖面的形式)。

囚徒困境

| | 沉默 | 告密 |
|---|---|---|
| 沉默 | -1, -1 | -4, 0 |
| 告密 | 0, -4 | $\boxed{-3, -3}$ |

囚徒困境的纳什均衡就是：

$a^*$ =(告密, 告密)

[唯一的纯策略纳什均衡]

## 纳什定理(*Nash's Theorem*)：

任一拥有有限个局中人和有限个可选行动的博弈至少存在一个纳什均衡[1]

[1] 更常见的纳什均衡是混合策略纳什均衡

## 混合策略 (*Mixed Strategy*)：

局中人的混合策略是在该局中人的行动集合上的概率分布

匹配硬币

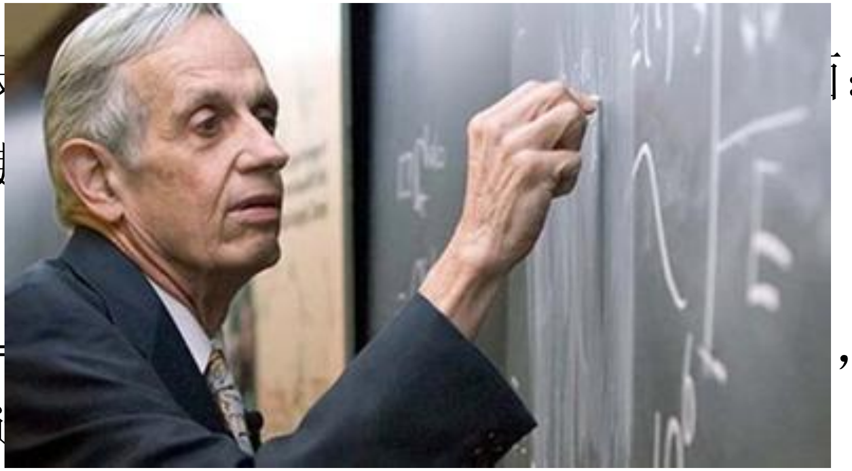
| | *Head* | *Tail* |
|---|---|---|
| *Head* | 1, −1 | −1, 1 |
| *Tail* | −1, 1 | 1, −1 |

假设 … 面：

使 … 则

得$p$= … ，

1/2 …



# 04 展开型博弈

# 展开型博弈

展开型博弈其实就是为博弈添加了时间维，即通常所谓的序贯结构。

其实前面有关囚徒困境实验的讨论已经涉及到序贯结构，即博弈不再是一次博弈，可能是多次甚至无限次的博弈。两者的沟通可以不再只是口头上的交流，还可以通过博弈历史来观察对方的行为，判断对方的倾向。那么试图掩盖自己不合作性质的局中人需要考虑的就是在哪一次选择背叛，而另一个局中人则需要考虑是立马进行报复还是原谅少数几次背叛。

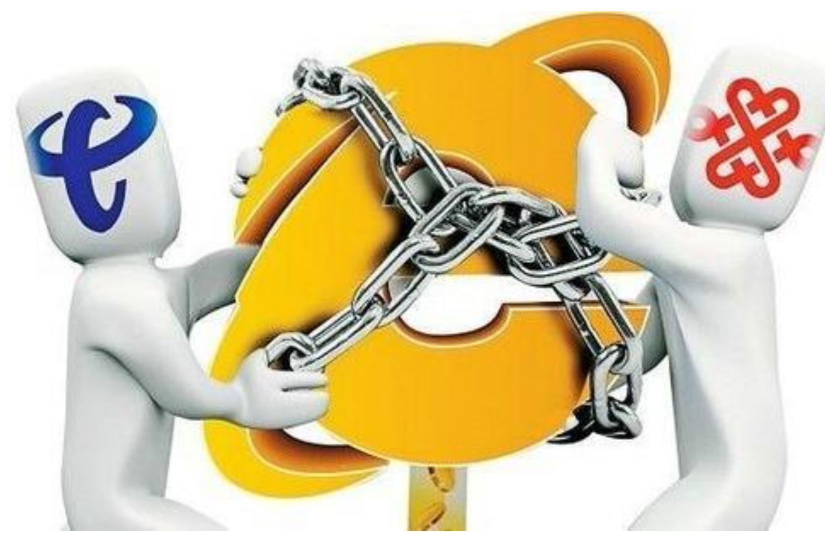
# 展开型博弈



先看一个例子:

**进入博弈**

在位者面临挑战者进入的可能。挑战者可能是一家厂商，正在考虑进入一个行业，该行业目前由一个垄断者占有。挑战者可以进入，可以不进入。假如他进入，那么在位者可以选择默许或斗争。

**主要构成要素：**

- 局中人集合
- 终端历史(*terminal histories*)：行动序列集合，其中没有一个序列是一些终端历史[1]的真子历史[2]
- 局中人函数(*the player function*)，给出在终端历史的每一个时刻行动的局中人
- 局中人偏好(*preference*)

[1] 终端历史可以理解为完整的行动序列

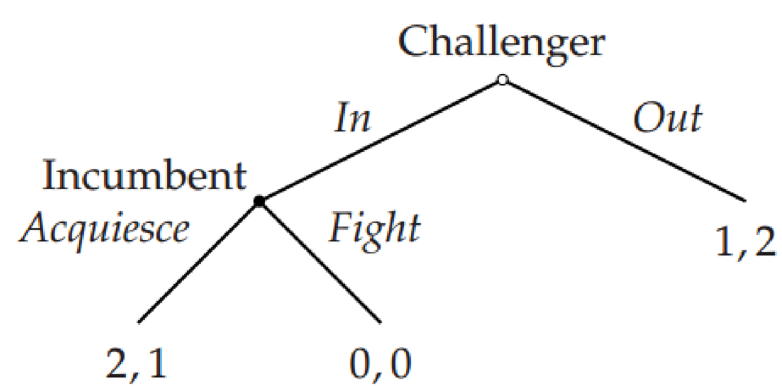
[2] 一个有限行动序列$(a^1, a^2, \ldots, a^n)$的子历史为没有行动的空历史$\emptyset$以及所有形式为$(a^1, a^2, \ldots, a^k)$的序列$(1 \leq k \leq n)$

数据挖掘实验室
Data Mining Lab

回到之前的那个例子:

**进入博弈**

| | |
|---|---|
| 局中人集合 | 挑战者和在位者 |
| 终端历史 | 不进入，(进入，默许)，(进入，斗争) |
| 局中人函数 | $P(\emptyset)$=挑战者，$P$(进入)=在位者 |
| 偏好 | 挑战者的偏好由盈利函数$u_1$表示，其中$u_1$(不进入)=1，$u_1$(进入，默许)=2，$u_1$(进入，斗争)=0；在位者的偏好由盈利函数$u_2$表示，其中$u_2$(不进入)=2，$u_2$(进入，默许)=1，$u_2$(进入，斗争)=0 |



数据挖掘实验室
Data Mining Lab
DM LESS IS MORE

## 均衡

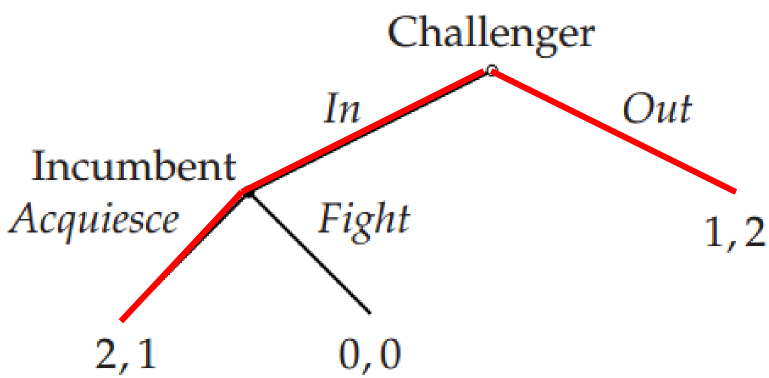
### 1. (展开型博弈中的)纳什均衡

策略剖面$s^*$是纳什均衡，应满足：对于每一个局中人$i$和局中人$i$的每一个策略$r_i$，按照局中人$i$的偏好，由$s^*$产生的终端历史$O(s^*)$至少如同由局中人$i$选择$r_i$而其他局中人$j$选择$s_j{}^*$的策略剖面$(r_i, s_{-i}{}^*)$所产生的终端历史$O(r_i, s_{-i}{}^*)$一样好，即，对于每一个局中人$i$：

$$u_i(O(s^*)) \geq u_i(O(r_i, s_{-i}{}^*)) \quad \text{对局中人}i\text{的每一个策略}r_i\text{都成立}$$

$O$是相关局中人采取的策略所对应的终端历史所导致的结局函数

## 进入博弈中的纳什均衡

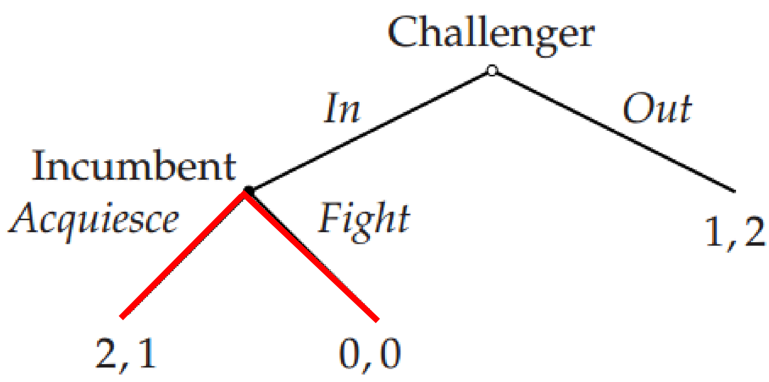



两个纳什均衡

1) (进入，默许)
局中人1改为不进入，则其收益从2变为1，故不应变；局中人2改为斗争，则收益从1变为0，故也不应变。

2) (不进入，斗争)
局中人1改为进入，则其收益从1变为0，故不应变；局中人2改为默许，收益不变。

现在考虑**(不进入，斗争)**这一均衡，可以发现它并不是稳健的




局中人2在此种策略剖面中，对于选择**默许**，还是**斗争**，就直接受益而言是无倾向的，那么为什么**(不进入，斗争)**是纳什均衡，而**(不进入，默许)**不是纳什均衡呢？

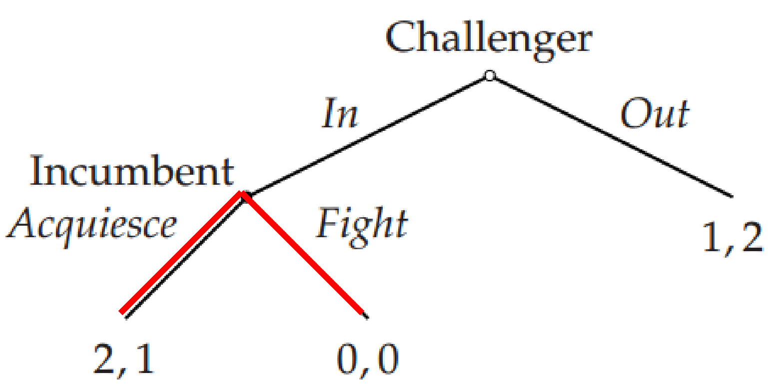
实际上，**斗争**可以视为局中人2为了获取其最高受益而对局中人1所作的威胁，但是这个威胁是否可信？即为什么局中人2会相信自己在选择**进入**后局中人2还会坚持**斗争**？假设局中人是完全理性的话(无论是任何情况都追求个人利益最大化)，那么局中人2更可能会反悔而选择**默许**。所以说，**(不进入，斗争)**这一均衡是不稳健的。

**子博弈完美均衡(*Subgame perfect equilibrium*)**就是对展开型博弈中纳什均衡的修正/精炼

**子博弈完美均衡(*Subgame perfect equilibrium*)**

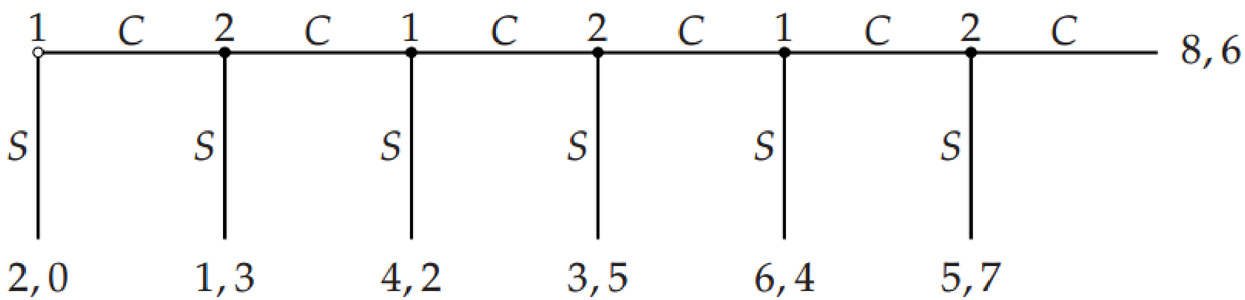
在之前所示的博弈树中，子博弈可以认为是包含叶子节点的子树。子博弈完美均衡就是指策略剖面s*在任一子博弈中都是均衡的。

**进入博弈中的子博弈完美均衡**




子博弈完美均衡排除掉之前所讨论的不稳健的纳什均衡**(不进入，斗争)**，因为在进入之后的序列所构成的子博弈中，斗争并非最佳策略。所以，只保留了**(进入，默许)**

## 一个典型博弈 蜈蚣博弈(*Centipede game*)




*C*：*continue*继续

*S*：*stop*停止

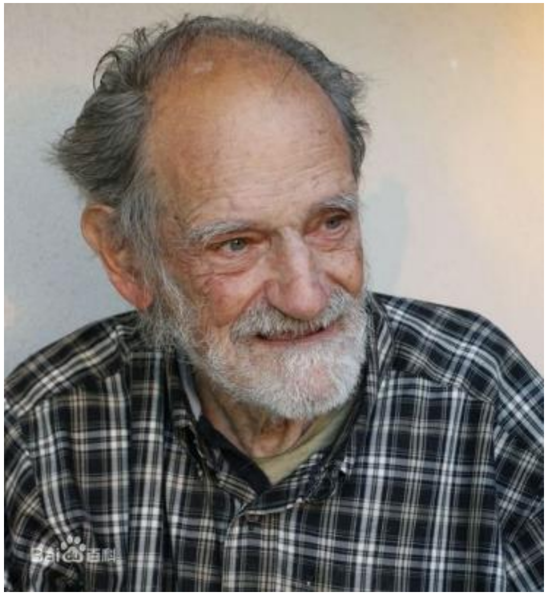
该博弈由于其形状而被称为“蜈蚣博弈”。局中人交替行动；在每一次行动中，局中人可以停止博弈(*S*)或继续下去(*C*)。此博弈的特点是短期来看(或者就子博弈完美的角度来看)，立即停止都是最佳选择；但是长期而言，双方都继续下去两者的收益都更大。[此博弈用“倒后推理(*backward induction*)”更方便观察]

# 05 联盟博弈

主要构成要素：

- 局中人集合
- 对于每一个联盟[1]，相应的行动集
- 对于每个局中人，在所有(他作为成员的)联盟的所有行动集上的偏好

[1] **联盟博弈(*Coalitional games*)**的结局包含了局中人群体的划分，划分后的每一个子群体就是一个联盟。



一个例子 **两人一致博弈**

两个人一起生产一个单位的产品，他们可能以自己喜欢的任何方式分享。没有一个人可以单独生产任何产品。每个人仅关心自己获得的产品量，并且多多益善。

对应的联盟博弈为：

| | |
|---|---|
| 局中人集合 | 两个人 |
| 行动与收益 | 每个局中人单独行动，这使他没有产出。两个人的联盟的行动集是所非负数对的集合$(x_1, x_2)$，且满足$x_1 + x_2$=1(在两个局中人之间对1单位产品分配的集合) |
| 偏好 | 每个局中人的偏好由他得到的产品量来描述 |

## 核心解概念 **沙普利值(*Shapley value*)**

联盟博弈将关注点从策略选择移往收益分配，沙普利值是满足诸多分配性质的联盟博弈的核心解概念：

$$\phi_i = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}\left(u(S \cup \{i\}) - u(S)\right)$$

$N$是包含所有局中人的集合，$S$是不包含局中人$i$的联盟

沙普利(1953)对上式做出如下解释：$N$中的所有玩家同意以大联盟(*the grand coalition*, 所有人组成的联盟)的方式参与一场博弈(收益由$u$函数决定)，大联盟由以下几步组成：1. 从一个个体开始，联盟一次只增加一个成员；2. 成员添加的顺序是完全随机的，所有排列都是等概率的；3. 每一个人，他的贡献等于他对联盟所提供的额外收益

# Reference

数据挖掘实验室
Data Mining Lab


- *Martin J. Osborne. An Introduction to Game Theory. Ch1-7.*
- *Bezalel Peleg, Peter Sudhölter. Introduction to the Theory of Cooperative Games. Ch8.*
- *Avinash K. Dixit, Barry J. Nalebuff . Thinking Strategically.*
- *F. C. Santos, et al. Evolutionary dynamics of social dilemmas in structured heterogeneous populations. PNAS(2006).*

# Thanks